



UMA ANÁLISE CRÍTICA DE MODELOS DE COLISÃO ENTRE CORPOS RÍGIDOS

Edson Cataldo

Universidade Federal Fluminense (UFF)

Departamento de Matemática Aplicada, Centro, Niterói, Brasil

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Departamento de Engenharia Mecânica

22453-900 - Gávea, Rio de Janeiro, Brasil

ecataldo@mec.puc-rio.br

Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Departamento de Engenharia Mecânica

22453-900 - Gávea - Rio de Janeiro - Brasil

rsampaio@mec.puc-rio.br

Resumo. Na modelagem de choque entre corpos rígidos, é difícil a construção de um modelo suficientemente simples que permita a simulação de um problema em tempo real e tão sofisticado de modo a representar bem a dinâmica. O objetivo desse artigo é descrever alguns desses modelos e compará-los usando simulações numéricas. Para melhor entendimento do problema, mostramos animações e usamos a interface gráfica do MATLAB. Damos atenção ao modelo de Frémond que utiliza os princípios da termodinâmica para criar modelos de choque. Os modelos comparados são: lei de Newton combinada com lei de Coulomb, lei de Poisson combinada com lei de Coulomb, modelo de Frémond com lei de Coulomb e com atrito viscoso.

Palavras-chave: *Colisões, Dinâmica, Simulação*

1. INTRODUÇÃO

Para estudarmos a dinâmica de corpos rígidos, incluindo choques, devemos observar que a cada colisão a equação diferencial que descreve a dinâmica do corpo em estudo é reinicializada. Para determinar as novas condições iniciais, obtidas a partir do estado do corpo no instante imediatamente antes do choque e das condições do obstáculo, vários modelos foram desenvolvidos. Os modelos clássicos, desenvolvidos na literatura, fazem hipóteses simplificadoras que, em alguns casos, conduzem a absurdos pois violam leis

físicas. Comparamos alguns desses modelos através de simulações numéricas. Começamos estudando o caso de colisão sem atrito. Para isso usamos a lei de Newton, que relaciona o coeficiente de restituição (normal) ($\bar{\epsilon}_N$) e as velocidades relativas normais dos corpos antes e após o choque por $\dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{NE}} = -\bar{\epsilon}_N \dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{NA}}$. Depois discutimos a lei de Poisson que relaciona o coeficiente de restituição com o impulsos normais no fim da fase de expansão ($\mathbf{I}_{\mathbf{NE}}$) e da fase de compressão ($\mathbf{I}_{\mathbf{NC}}$) por $\mathbf{I}_{\mathbf{NE}} = \bar{\epsilon}_N \mathbf{I}_{\mathbf{NC}}$. Para estudarmos o caso com atrito começamos combinando a lei de Newton com a lei de Coulomb. Mostraremos, através de exemplo, que esse modelo pode contrariar a lei da conservação de energia. Combinamos, então, a lei de Poisson com a lei de Coulomb. A partir daí, nos concentramos na discussão dos modelos propostos por Frémond que considera o sistema formado pelos corpos que irão colidir como um sistema deformável e usa os princípios da termodinâmica para criar leis que descrevem o choque evitando modelos que violem esses princípios, como o de Newton.

2. EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações que descrevem a cinemática e a dinâmica da colisão são discutidas a seguir. Considere \mathbf{q} o vetor de coordenadas generalizadas que indicam a posição do corpo rígido. Usamos \mathbf{q}_A para indicar a posição antes do choque, \mathbf{q}_C para indicar a posição no fim da fase de compressão e \mathbf{q}_E para indicar a posição no fim da fase de expansão. $\mathbf{D}_{\mathbf{NA}}$ é um vetor cujos elementos determinam a componente normal da distância entre os pontos de contato dos corpos antes da colisão, $\mathbf{D}_{\mathbf{NC}}$ é um vetor cujos elementos determinam a componente normal da distância entre os pontos de contato dos corpos no fim da fase de compressão e $\mathbf{D}_{\mathbf{NE}}$ é um vetor cujos elementos determinam a componente normal da distância entre os pontos de contato dos corpos no fim da fase de expansão. $\mathbf{D}_{\mathbf{TA}}$ é um vetor cujos elementos determinam a componente tangencial da distância entre os pontos de contato dos corpos antes da colisão, $\mathbf{D}_{\mathbf{TC}}$ é um vetor cujos elementos determinam a componente tangencial da distância entre os pontos de contato dos corpos no fim da fase de compressão e $\mathbf{D}_{\mathbf{TE}}$ é um vetor cujos elementos determinam a componente tangencial da distância entre os pontos de contato dos corpos no fim da fase de expansão. $\mathbf{I}_{\mathbf{NC}}$ é um vetor cujos elementos determinam os valores dos impulsos normais nos pontos dos corpos em contato no fim da fase de compressão e $\mathbf{I}_{\mathbf{NE}}$ é o impulso normal no fim da fase de expansão. $\mathbf{I}_{\mathbf{TC}}$ é um vetor cujos elementos determinam os valores dos impulsos tangenciais nos pontos dos corpos em contato no fim da fase de compressão e $\mathbf{I}_{\mathbf{TE}}$ é o impulso tangencial no fim da fase de expansão. W_N e W_T são matrizes cujos elementos são os coeficientes dos vetores que descrevem os impulsos normal e tangencial nas equações da dinâmica dos corpos. $\tilde{\mathbf{w}}_N$ e $\tilde{\mathbf{w}}_T$ são vetores relacionados à rotação dos corpos.

Na fase de compressão temos

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{NC}} \\ \dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{TC}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^T \\ W_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_C + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_N \\ \tilde{\mathbf{w}}_T \end{pmatrix} \quad (1)$$

e

$$M(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) - \begin{pmatrix} W_N & W_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{NC}} \\ \mathbf{I}_{\mathbf{TC}} \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Na fase de expansão temos

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{D}}_{\text{NE}} \\ \dot{\mathbf{D}}_{\text{TE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^T \\ W_T^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_N \\ \tilde{\mathbf{w}}_T \end{pmatrix} \quad (3)$$

e

$$M(\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{C}}) - \begin{pmatrix} W_N & W_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\text{NE}} \\ \mathbf{I}_{\text{TE}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

3. CASO SEM ATRITO : LEI DE NEWTON

Considerando a definição do coeficiente de restituição dado por Newton, temos

$$\dot{\mathbf{D}}_{\text{NE}} = -\bar{\epsilon}_N \dot{\mathbf{D}}_{\text{NA}} \quad (5)$$

sendo $\bar{\epsilon}_N$ uma matriz diagonal contendo os coeficientes de restituição ϵ_i , onde $0 \leq \epsilon_i \leq 1$. No caso sem atrito o vetor que descreve a velocidade após o choque é dado por

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{A}} - M^{-1}W_N G_N^{-1}(E + \bar{\epsilon}_N)\dot{\mathbf{D}}_{\text{NA}} \quad (6)$$

sendo $G_N = W_N^T M^{-1} W_N$ e E é a matriz identidade. Esse resultado está demonstrado em (Pfeiffer and Glocker, 1996).

O exemplo a ser utilizado para comparação dos modelos é o de uma barra rígida chocando-se contra uma barreira como indica a Fig 1.

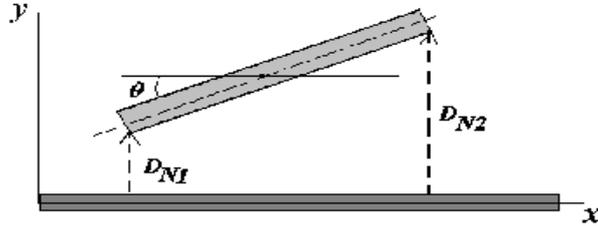


Figura 1: Exemplo usado para comparação das leis de choque.

Consideremos o caso em que $\epsilon = 0.9$ e $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$. Mostramos a animação desse problema na Fig. 2.

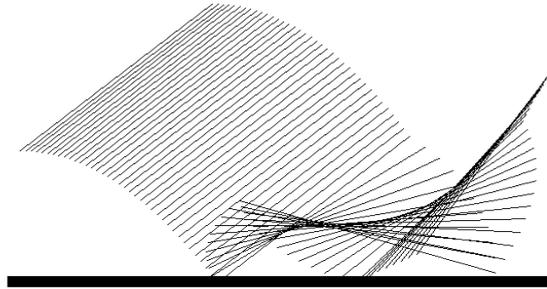


Figura 2: Animação: lei de Newton sem a consideração de atrito.

O gráfico da energia é mostrado na Fig. 3.

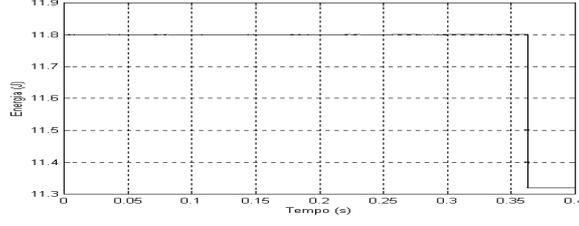


Figura 3: Energia : lei de Newton sem a consideração de atrito.

4. CONSIDERAÇÃO DE ATRITO : LEI DE COULOMB

Consideremos o caso da barra estudada anteriormente.

Para a fase de compressão temos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NC} = \frac{1+3\cos^2\theta}{m}I_{NC} - \frac{3\text{sen}\theta\cos\theta}{m}I_{TC} + \dot{D}_{NA} \\ \dot{D}_{TC} = \frac{-3\text{sen}\theta\cos\theta}{m}I_{NC} + \frac{1+3\text{sen}^2\theta}{m}I_{TC} + \dot{D}_{TA}. \end{cases} \quad (7)$$

Para a fase de expansão temos

$$\begin{cases} \dot{D}_{NE} = \frac{1+3\cos^2\theta}{m}I_{NE} - \frac{3\text{sen}\theta\cos\theta}{m}I_{TE} + \dot{D}_{NC} \\ \dot{D}_{TE} = \frac{-3\text{sen}\theta\cos\theta}{m}I_{NE} + \frac{1+3\text{sen}^2\theta}{m}I_{TE} + \dot{D}_{TC}. \end{cases} \quad (8)$$

4.1. Considerações de Energia

Quando usamos a lei de Poisson, para colisões no plano, é provado em (Pfeiffer and Glocker 1996) que $T_E - T_A \leq 0$ (T_E é a energia no fim da fase de expansão e T_A é a energia imediatamente antes da colisão). No exemplo que nós estudamos, estamos preocupados com o caso em que os resultados dados pelas leis de Newton e de Poisson são diferentes. Considerando T_A a energia cinética antes da colisão e T_E a energia cinética após a colisão, temos

$$T_E - T_A = \frac{1}{2}[I^T(\dot{D}_E + \dot{D}_A)] \quad (9)$$

sendo $I = [I_T, I_N]^T$, $\dot{D}_E = [\dot{D}_{TE}, \dot{D}_{NE}]^T$ e $\dot{D}_A = [\dot{D}_{TA}, \dot{D}_{NA}]^T$.

Para que possamos comparar com os dados obtidos para o caso da Lei de Newton sem atrito, consideremos as mesmas condições, mas agora acrescentaremos atrito. Usaremos $\mu = 1$.

Mostramos a animação, para o caso da lei de Newton com atrito, na Fig. 4.

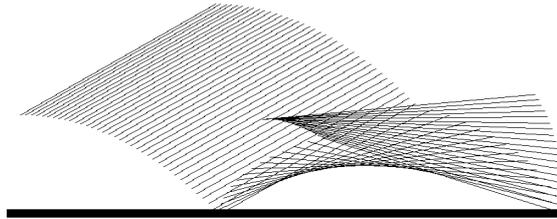


Figura 4: Animação: lei de Newton com a consideração de atrito de Coulomb.

Visualmente, já percebemos a diferença ao acrescentarmos atrito. Porém, o problema é mais sério, pois o modelo, usando as condições acima, contraria a lei da conservação de energia. Isso pode ser visto quando observamos o gráfico da energia na Fig. 5.

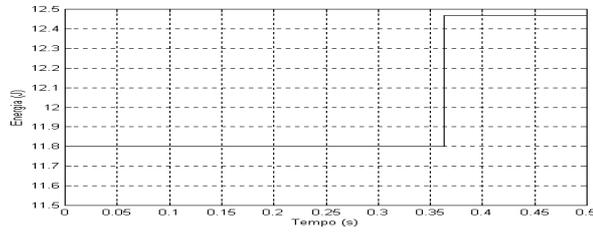


Figura 5: Geração de energia no choque.

Porém, o problema da geração de energia não ocorre se utilizarmos a lei de Poisson. O gráfico da animação para esse caso é mostrado na Fig 6. Traçamos o gráfico da energia na Fig 7.

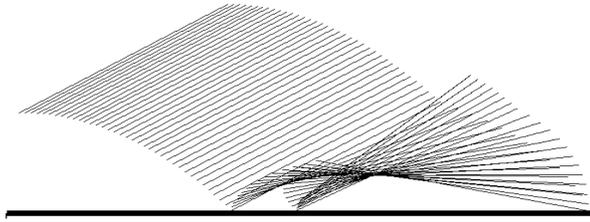


Figura 6: Animação: Lei de Poisson com a consideração de atrito de Coulomb.

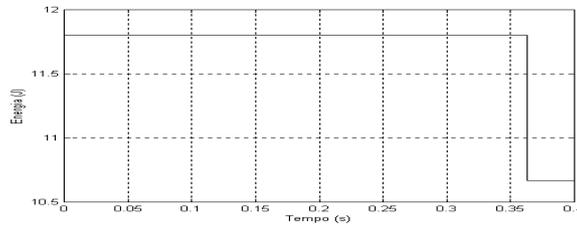


Figura 7: Energia.

5. MODELO DE FRÉMOND

Nesse modelo é desenvolvida uma teoria de choques entre corpos rígidos que permite construir teorias, evitando situações onde energia é gerada no choque. O inovador é que o tratamento é feito usando a Mecânica dos Meios Contínuos, o que simplifica a formulação das hipóteses constitutivas, além de garantir a coerência termodinâmica.

Consideremos um sistema formado por um ponto material $\mathbf{x}_1(t)$ e um sólido $\Omega(t)$. Esse sistema é deformável pois a posição relativa entre o ponto material e o sólido varia.

A distância $d(t)$ entre os elementos do sistema é definida por

$$d(t) = d(\mathbf{x}_1(t), \partial\Omega(t)) = (\mathbf{x}_1(t) - \text{proj}\mathbf{x}_1(t)) \cdot \mathbf{N}(\text{proj}\mathbf{x}_1(t)). \quad (10)$$

Seendo $proj_{\mathbf{x}}$ o ponto do sólido mais próximo do ponto \mathbf{x} . A condição de não interpenetração entre os sólidos é expressa por $d(t) \geq 0 \quad \forall t$.

O sólido $\Omega(t)$ tem um movimento de corpo rígido, logo sua velocidade é definida por uma distribuição de velocidade $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_0(t), \boldsymbol{\omega}_0(t)\}$ com

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0(t) + \boldsymbol{\omega}_0(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (11)$$

A velocidade do ponto $\mathbf{x}_1(t)$ é dada por

$$\mathbf{V}_1(t) = \mathbf{V}_0(t) + \boldsymbol{\omega}_0(t) \wedge (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0). \quad (12)$$

Definimos taxa de deformação do sistema, denotada por $D(\mathbf{V})$, como

$$D(\mathbf{V})(t) = \mathbf{V}_1(t) - \mathbf{V}_2(\mathbf{x}_1(t), t). \quad (13)$$

Denotaremos por \mathbf{V}_N^+ e \mathbf{V}_N^- as velocidades antes e após a colisão.

5.1. Construção das leis que descrevem o choque

Para escrever as leis que descrevem a dinâmica do choque são usados os princípios da Termodinâmica. O estado termodinâmico do sistema é descrito pela distância $d(t)$ entre o sólido e o plano e pelas temperaturas de alguns dos corpos que para simplificar serão escolhidas constantes e iguais a T (positiva). Supomos que não há outras variáveis de estado. A evolução termodinâmica é descrita pelas taxas de deformação $D(\mathbf{V})$ (ou $D(\mathbf{V}^-)$ e $D(\mathbf{V}^+)$, se houver descontinuidade de velocidade).

Usando o Primeiro Princípio da Termodinâmica podemos chegar à conclusão de que num choque

$$\mathbf{I}^{int}(t) \cdot \frac{D(\mathbf{V}^+)(t) + D(\mathbf{V}^-)(t)}{2} + B(t) = 0 \quad (14)$$

sendo \mathbf{I}^{int} o impulso causado pelas forças internas e B o calor trocado durante um choque.

As variáveis de estado do sistema são contínuas (a temperatura T é suposta constante). Não há descontinuidade de energia interna.

Aplicando o Segundo Princípio, podemos chegar à conclusão de que

$$\mathbf{I}^{int}(t) \cdot \frac{D(\mathbf{V}^+)(t) + D(\mathbf{V}^-)(t)}{2} \geq 0 \quad (15)$$

5.2. Leis de Comportamento

Procuramos leis para definir um processo termodinâmico admissível.

Chamaremos I_{R^+} a indicatriz de R^+ (conjunto dos reais não negativos) e sua subdiferencial por ∂I_{R^+} .

Assim, os esforços de reação internos do sistema serão definidos por

$$\mathbf{R}^{reac}(t) \in \partial I_{R^+}(d(t)) \quad e \quad \mathbf{I}^{reac}(t) \in \partial^+ I_{R^+}(d(t)). \quad (16)$$

As relações acima permitem extrair as seguintes conclusões : o vínculo $d(t) \geq 0$ é satisfeito e existem esforços de reação R^{reac} e I^{reac} negativos ou nulos sob certas condições.

Esses esforços não têm ação à distância (se $d(t) > 0$ então $R^{reac} = 0$ e $I^{reac} = 0$; isto é, eles desaparecem quando o contato é rompido). Os esforços de reação verificam

$$\mathbf{R}^{reac}(t).D(\mathbf{V})(t) \geq 0 \text{ e } \mathbf{I}^{reac}(t).\frac{D(\mathbf{V}^+)(t) + D(\mathbf{V}^-)(t)}{2} \geq 0. \quad (17)$$

Os esforços não dissipativos associados à energia liberada serão também definidos pelas evoluções regulares e pelos choques

$$\mathbf{R}^{nd}(t) = (R^r(t) + R^{reac}(t))\mathbf{N}(proj\mathbf{p}_1(t)) \text{ e } \mathbf{I}^{nd}(t) = I^{reac}(t)\mathbf{N}(proj\mathbf{p}_1(t)) \quad (18)$$

Para definir a dissipação associada com as interações entre os sólidos, supomos que existam duas funções $\mathbf{R}^d((T, d), D(\mathbf{V}))$ e $\mathbf{I}^d((T, d), D(\mathbf{V}^+), D(\mathbf{V}^-))$ tais que

$$\mathbf{R}^d((T, d), D(\mathbf{V})).D(\mathbf{V}) \geq 0 \text{ e } \mathbf{I}^d((T, d), D(\mathbf{V}^+), D(\mathbf{V}^-)).\frac{D(\mathbf{V}^+) + D(\mathbf{V}^-)}{2} \geq 0. \quad (19)$$

As leis de comportamento são escolhidas da forma

$$\mathbf{R}^{int} = (R^{reac} + R^r)\mathbf{N}(proj\mathbf{p}_1) + \mathbf{R}^d \text{ e } \mathbf{I}^{int} = I^{reac}\mathbf{N}(proj\mathbf{p}_1) + \mathbf{I}^d \quad (20)$$

Pode ser mostrado que essas condições verificam o Segundo Princípio da Termodinâmica. Estamos interessados na expressão do termo dissipativo do impulso interior dissipativo I^d . Em Mecânica dos Meios Contínuos, a dissipação pode ser definida a partir de pseudo-potenciais das dissipações que são funções convexas, não-negativas, nulas na origem e subdiferenciáveis. Essas funções satisfazem o Segundo Princípio da Termodinâmica, daí formarem modelos coerentes. Uma escolha razoável é fazer depender o pseudo-potencial das dissipações ϕ da soma das taxas de deformação antes e após o choque. Escolhemos, então,

$$Se \ d(t) > 0 \Rightarrow I^d = 0 \text{ e } se \ d(t) = 0 \Rightarrow I^d \in \partial\phi\left(\frac{D(\mathbf{V}^+) + D(\mathbf{V}^-)}{2}\right). \quad (21)$$

5.3. Lei para o comportamento normal

Faremos os impulsos normais dependerem apenas das taxas de deformação normais durante o choque e escolheremos como lei

$$I_N^d(z) \in \partial\phi_1(z) = k_N z |z|^{p-2} \text{ para } p > 1 \text{ com } \phi_1(z) = \frac{k_N}{m} |z|^p. \quad (22)$$

Para o nosso exemplo, a equação da dinâmica será dada por

$$m(\dot{D}_{NE} - \dot{D}_{NA}) = -k_N(\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA}) |\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA}|^{p-2} - I^{reac} \quad (23)$$

Se $I^{reac} = 0 \Rightarrow m(\dot{D}_{NE} - \dot{D}_{NA}) + k_N(\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA}) |\dot{D}_{NE} + \dot{D}_{NA}|^{p-2} = 0$.

Se $\dot{D}_{NE} = 0 \Rightarrow -m\dot{D}_{NA} = -k\dot{D}_{NA} |\dot{D}_{NA}|^{p-2}$ e $I^{reac} = (k_N |\dot{D}_{NA}|^{p-2} - m)\dot{D}_{NA}$.

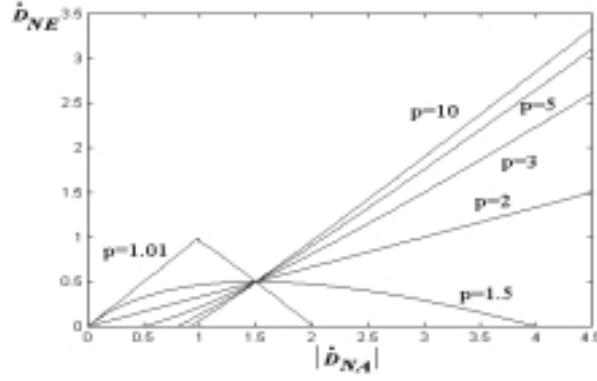


Figura 8: Velocidade normal após o impacto contra a velocidade normal antes do impacto em função de p .

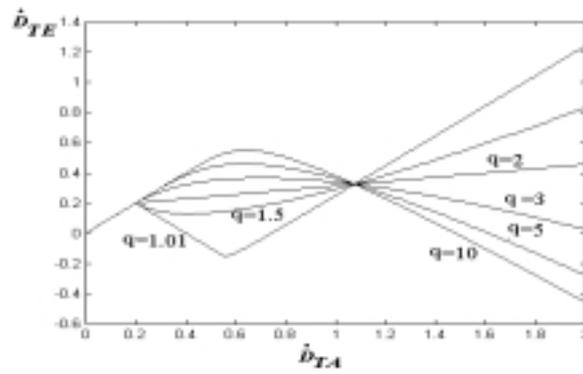


Figura 9: Velocidade tangencial após o impacto, \dot{D}_{TE} , em função da velocidade tangencial antes do impacto, \dot{D}_{TA} , no caso de atrito viscoso.

No caso particular em que $p = 2$, podemos obter o coeficiente de restituição de Newton, quando $\epsilon \neq 1$, fazendo

$$\epsilon = -\frac{m - k_N}{m + k_N}. \tag{24}$$

Traçamos vários gráficos, de \dot{D}_{NE} por $|\dot{D}_{NA}|$ para vários valores de p , que são mostrados na Fig 8.

5.4. Lei para o comportamento tangencial

No caso de comportamento tangencial usaremos dois casos : atrito de Coulomb e atrito viscoso. O caso do atrito de Coulomb já foi discutido. Trataremos agora do atrito viscoso. Escolhemos o impulso tangencial dependente das taxas de deformação tangencial antes e após o impacto definido por

$$I_T^d(D(\dot{D}_{TE}), D(\dot{D}_{TA})) \in \partial\phi_T(D(\dot{D}_{TE}) + D(\dot{D}_{TA})) \tag{25}$$

com $\phi_T(y) = \frac{k_T}{q}(\sup(0, |y| - r))^q$ para $q > 1$ e $r \geq 0$.

Traçamos gráficos da velocidade tangencial após o impacto em termos da velocidade tangencial antes do impacto e mostramos na Fig 9, para $r = 0.4$.

Para as simulações usaremos as mesmas condições dos casos anteriores acrescentando os seguintes parâmetros : para o modelo de Frémond com atrito de Coulomb, usamos $p = 3$, $q = 2$, $\mu = 1$ e para o modelo de Frémond com atrito viscoso, usamos $p = 3$, $q = 2$, $r = 0.4$ e $kt = 0.75$. Os gráficos referentes a esses casos são mostrados nas Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13.

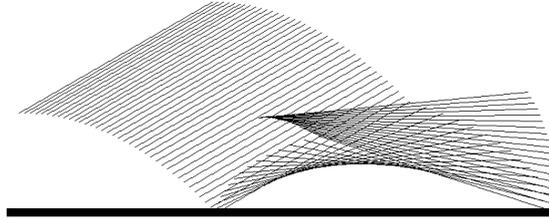


Figura 10: Animação : Frémond com atrito de Coulomb, caso $\mu = 1$, $p = 3$ para o comportamento normal e $q = 2$ para o comportamento tangencial.

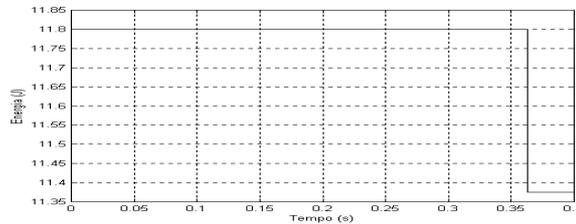


Figura 11: Energia : Frémond com atrito de Coulomb, caso $\mu = 1$, $p = 3$ para o comportamento normal e $q = 2$ para o comportamento tangencial.

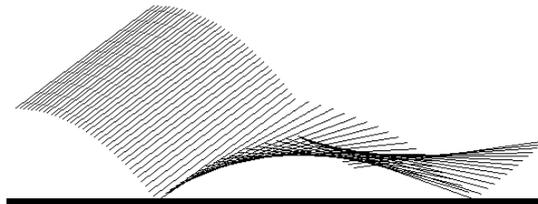


Figura 12: Animação : Frémond com atrito viscoso, caso $p = 3$ para o comportamento normal e $q = 2$ para o comportamento tangencial.

6. CONCLUSÕES

Alguns dos modelos considerados para estudarmos o choque entre os corpos podem falhar, pois contrariam leis físicas. Através de um estudo mais detalhado, usando gráficos e tabelas, mostramos alguns casos em que esses modelos falham. Comparamos esses modelos tentando mostrar vantagens e desvantagens de cada um.

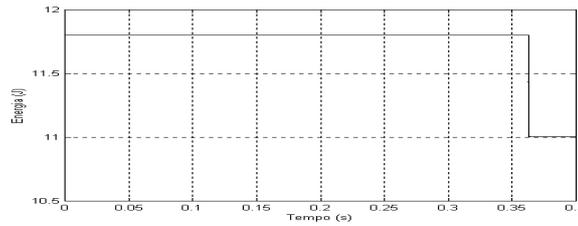


Figura 13: Energia : Frémond com atrito viscoso, caso $p = 3$ para o comportamento normal e $q = 2$ para o comportamento tangencial.

REFERÊNCIAS

Pfeiffer, F. & Glocker, C. , 1996, Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. Wiley series in nonlinear science.

Frémond, M. , 1995, Collisions of Rigid Bodies. Contact Mechanics, pp 397-404. Edited by M. Raous *et al.* Plenum Press, New York.

A CRITICAL ANALYSIS OF MODELS OF COLLISIONS BETWEEN RIGID BODIES

Abstract. In modeling collisions between rigid bodies it is difficult to construct a model sufficiently simple that permits the simulation of a problem in real time and so sophisticated to represent well the dynamics. The aim of this paper is to describe some of the models more used and to compare them using numeric simulations and to show its limits of validity. To understand what is happening we show animations, using the graphical user interface of MATLAB. The models compared are : Newton's law combined with Coulomb's law, Poisson's law combined with Coulomb's law, Frémond's model with Coulomb's law and Frémond's law with viscous friction.

Key-words: *Collisions, Dynamics, Simulation*